

CONCURSUL PRO-PERFORMANȚA

SUBIECTE

Ediția a IX-a

Clasele IX-XII

1. Fețele unui cub sunt vopsite fiecare fie în roșu, fie în albastru. Câte o furnică este poziționată în fiecare dintre cele opt colțuri ale cubului, iar fiecare furnică poate vedea doar cele trei fețe care se întâlnesc în acel colț al cubului. În această problemă, furnicile vor fi întrebate despre fețele pe care le pot vedea și vor răspunde întotdeauna sincer.

(i) Fiecare furnică este întrebată: Poți vedea un număr par de fețe roșii?. Fiecare furnică răspunde fie da, fie nu. Numărul de furnici care spun da este par sau impar? Justificați răspunsul.

(ii) Este posibil ca toate cele opt furnici să vadă exact două fețe roșii fiecare? Justificați răspunsul.

(iii) Se presupune că cele patru furnici aflate în colțurile feței superioare a cubului pot vedea exact 0, 1, 1 și 2 fețe roșii, într-o anumită ordine. Câte fețe albastre pot exista în total? Găsiți toate posibilitățile și explicați răspunsul.

2. Suntem într-o cameră întunecată cu 100 de monede pe masă, 12 sunt cu fața în sus (cap) și restul cu fața în jos (pajură), iar cele două fețe nu pot fi distinse în întuneric. Cum putem separa monedele în două grămezi astfel încât numărul de monede cu fața în sus din fiecare grămadă să fie același (avem voie să răsturnăm monede, fără a ști ce față au, deoarece e întuneric)?

3. Cântecele din perioada clasică marțiană conțineau doar două note (să le numim x și y) și erau construite conform unor reguli riguroase:

I. Secvența care nu conține nicio notă era considerată un cântec;

II. O secvență care începe cu x , urmată de două repetiții ale unui cântec existent și terminată cu y era, de asemenea, un cântec;

III. Secvența de note obținută prin interschimbarea lui x cu y într-un cântec era, de asemenea, un cântec.

Toate cântecele au fost construite folosind aceste reguli.

(i) Scrieți patru cântece de lungime șase (adică, cântece care conțin exact șase note).

(ii) Arătați că, dacă există k cântece de lungime m , atunci există $2k$ cântece de lungime $2m + 2$. Deduceți că pentru fiecare număr natural n , există 2^n cântece de lungime $2^{n+1} - 2$.

- Fiecare problemă este punctată cu nota maximă 7.

- Pentru obținerea punctajului maxim sunt necesare toate explicațiile care se impun.