

Concursul Pro-Performanța

Ediția a IX-a, 01 februarie 2025

CLASELE IX-XII– Barem

Problema 1. (i) Fiecare față este văzută de 4 furnici. Dacă adunăm câte fețe roșii poate vedea fiecare furnică, ar trebui să obținem de patru ori numărul de fețe roșii, ceea ce ne dă un număr par în total. Dacă un număr impar de furnici răspund Nu la această întrebare, atunci numărul total de fețe roșii pe care acele furnici le pot vedea este impar. Furnicile care răspund Da pot vedea fiecare un număr par de fețe roșii. Astfel, numărul total de fețe roșii ar fi impar. Asta nu este în regulă, conform logicii de mai sus. Alternativ, putem enumera cele zece posibilități pentru modul în care cubul poate fi vopsit (până la rotație) și verifica câte furnici pot vedea un număr par de fețe roșii în fiecare caz. ... 3p

(ii) Da, acest lucru este posibil dacă exact două dintre fețe sunt albastre, iar celelalte patru sunt roșii, cu cele două fețe albastre opuse una alteia. 2p

(iii) Cifra 0 înseamnă că această față superioară este albastră. Apoi, cifra 2 înseamnă că două dintre fețele laterale sunt roșii. Celelalte două fețe laterale trebuie să fie albastre, altfel o altă furnică ar fi spus 2. Acestea sunt toate fețele, cu excepția feței inferioare. Nu putem deduce culoarea acestei fețe, deoarece schimbarea culorii acesteia nu ar modifica ceea ce pot vedea cele patru furnici din jurul feței superioare. Prin urmare, în total există fie trei, fie patru fețe albastre. 2p

Problema 2. Separăm cele 100 de monede în două grupe: o grupă de 12 monede și una de 88 monede. 2p

Întoarcem invers toate monedele din prima grupă. Astfel, dacă inițial erau în prima grupă x monede cap și $12 - x$ pajură, acum sunt x pajură și $12 - x$ cap.

În a doua grupă erau și sunt $12 - x$ monede cap. 4p

Așadar am separat grămezile conform cerinței. 1p

Problema 3. Singura modalitate de a crea cântece mai lungi, din cele anterioare, este prin Regula II. Secvența xy este un cântec de lungime doi (deoarece poate fi obținută prin Regula II ca x -nici o notă-nici o notă- y), iar prin aplicarea Regulii III, yx este, de asemenea, un cântec. 1p

Cu aceste două cântece și folosind din nou Regula II, putem produce două cântece:

$$xxyxyy \text{ și } xyxyxy$$

de lungime șase, iar aplicând Regula III observăm că și următoarele sunt cântece:

$$yyxyxx \text{ și } yxyxyx.$$

..... 2p

(ii) Așa cum s-a observat în (i), cântecele mai lungi pot fi produse doar din cele mai scurte utilizând Regula II. Dat fiind un cântec s de lungime m , atunci secvența $xssy$ este, de asemenea, un cântec. Astfel, k cântece de lungime m generează k noi cântece de lungime $2m + 2$ 1p

Singura modalitate de a produce alte cântece de lungime $2m + 2$ este de a interschimba x -urile și y -urile în noile cântece, conform Regulii III. Astfel, $y\tilde{s}\tilde{s}x$ va fi, de asemenea, un

cântec de lungime $2m+2$, unde $\tilde{s}$ reprezintă cântecul s cu toate x -urile și y -urile inversate.
1p

Deoarece noul set de cântece se termină cu un x și setul anterior se termina cu un y , rezultă că al doilea set de cântece de lungime $2m+2$ nu conține niciun element din primul set. În total, avem $2k$ noi cântece de lungime $2m+2$ 1p

Ultima cerință se demonstrează prin inducție matematică. 1p

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.