

Concursul Pro-Performanța

Ediția a X-a

CLASA a VII-a – Barem

Problema 1. Din cele trei afirmații ale fiecărui coleg, exact două trebuie să fie adevărate. În acest context, afirmațiile care apar des devin "favorite" și tindem să le considerăm adevărate, altfel nu am putea atinge numărul de două propoziții adevărate per coleg.....1p

Observăm că:

- "Dan preferă handbal" apare în I, III și IV;
- "Bebe preferă schi" apare în II și IV;
- "Ana preferă polo" apare în I și III.

..... 2p

Dacă le considerăm pe acestea drept adevărate, verificăm dacă putem completa fără contradicții:

$$A = \text{polo}, \quad B = \text{schi}, \quad D = \text{handbal}.$$

..... 2p

Rămâne de stabilit sportul lui Cornel. Din afirmația II ("Cornel preferă tenis") rezultă natural:

$$C = \text{tenis}.$$

..... 1p

Se verifică acum că, pentru această atribuire:

$$A = \text{polo}, \quad B = \text{schi}, \quad C = \text{tenis}, \quad D = \text{handbal},$$

fiecare dintre grupurile I, II, III, IV conține exact două afirmații adevărate și una falsă, fără contradicții suplimentare.

..... 1p

Problema 2.

Fie a, b, c, d, e, f numărul de victorii ale lui A, B, C, D, E, F .

Fiecare persoana a jucat 5 meciuri în total $\Rightarrow a, e \in \{1, 3, 5\}$.

Dar din (1) stim că o singură persoană a câștigat toate meciurile $\Rightarrow a, e \in \{1, 3\}$. În plus, din (5) stim că doar C și o altă persoană au exact o victorie $\Rightarrow a = 3$ și $e = 3$... 2p

$$a + b + c + d + e + f = 15 \text{ (numărul total de victorii e egal cu numărul total de meciuri)}$$

Există două persoane cu o victorie, două cu trei victorii și una cu 5 $\Rightarrow$ a 6-a persoană are $15 - (1 + 1 + 3 + 3 + 5) = 2$ victorii..... 2p

Dintre numerele 1, 1, 3, 3, 2, 5 doar 2 și 5 au suma 7 $\Rightarrow \{b, f\} = \{2, 5\}$. Dar cum B a pierdut cu $D \Rightarrow f = 5$ și $b = 2$ 1p

A a pierdut cu E si F , dar are 3 victorii $\Rightarrow A$ a castigat cu B, C, D .

B a pierdut cu A, D si F , dar are 2 victorii $\Rightarrow B$ a castigat cu C si E .

E a pierdut cu B si F , dar are 3 victorii $\Rightarrow E$ a castigat cu A, C si D .

C are o singura victorie: asupra lui D .

	A	B	C	D	E	F
A	–	1	1	1	0	0
B	0	–	1	0	1	0
C	0	0	–	1	0	0
D	0	1	0	–	0	0
E	1	0	1	1	–	0
F	1	1	1	1	1	–

.....2p

Problema 3.

a) Dacă mulțimea ar fi frumoasă, atunci ținta ar fi $T = 1 + 11 = 12$. Dintre celelalte 6 numere rămase, doar o pereche care are suma 12 putem găsi. Deci A nu este frumoasă.
3p

b) Fie primele 27 de numere naturale scrise în ordine crescătoare. Le grupăm în 9 mulțimi de câte 3 elemente. Există doar opt moduri de a colora trei elemente ordonate:

RRR, RRG, RGR, RGG, GRR, GRG, GGR, GGG,

deci două dintre aceste nouă mulțimi trebuie să fie colorate în același mod.....2p

În fiecare dintre aceste două mulțimi care se potrivesc, există două elemente care au aceeași culoare. Să numim elementele din prima mulțime x și $x + A$, iar elementele din a doua mulțime y și $y + A$, unde A este fie 1, fie 2, dar este același pentru ambele mulțimi care se potrivesc. 1p

Aceste patru numere formează o mulțime frumoasă cu ținta $x + y + A$, deoarece

$$x + (y + A) = (x + A) + y.$$

..... 1p

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.